

# **Modelización empírica y teórica en el Proceso Analítico Jerárquico (AHP)**

Jiménez Ruiz-Alejos, Jorge

Moreno Jiménez, José María

Salvador Figueras, Manuel

Departamento de Métodos Estadísticos  
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales  
Universidad de Zaragoza

## **Resumen:**

En este trabajo se contrastan dos maneras de construir la jerarquía utilizada en la fase de modelización de una de las técnicas de decisión multicriterio más extendidas, el Proceso Analítico Jerárquico (AHP). La primera, más objetiva, se basa en la aplicación de técnicas multivariantes, en particular el análisis factorial, a los datos existentes del problema, y la segunda, más subjetiva, basada en la opinión del decisor/analista encargado de la resolución del problema.

## **Palabras clave:**

AHP, Jerarquía, Análisis Factorial, Análisis Estructural, Modelización Empírica.

# 1. Introducción

El enfoque tradicional del Proceso Analítico Jerárquico (AHP) proponía el uso de una jerarquía en la que se intentaba balancear el nivel de detalle que se precisara, así como la operatividad que dicha jerarquía debiera alcanzar. En este trabajo se plantea un método que, inicialmente, permita orientar la construcción de dicha jerarquía a partir de los datos existentes.

Una vez construida la jerarquía, se pasa a la siguiente fase que es la de valorar la importancia que tiene cada nodo de la misma. Esta valoración se puede hacer de dos formas diferentes: de arriba a abajo (top-down) o de abajo a arriba (down-top). La primera es una valoración más subjetiva, que viene a recoger la experiencia que el decisor tiene sobre los juicios y atributos. La segunda tiene un carácter más objetivo y la importancia que se le da a cada atributo está influenciada por el poder discriminador de los datos.

Existen ligeras diferencias entre las dos formas de valorar la jerarquía. Estas dos formas se pueden combinar para establecer la importancia relativa que tiene un atributo: importancia subjetiva (a priori) ( $\omega_j$ ) e importancia objetiva (a posteriori) ( $\delta_j$ ) de forma que la importancia relativa  $\lambda_j$  se pueda obtener a partir de  $\omega_j$  y  $\delta_j$ .

En lo que sigue vamos a intentar aprovechar la información existente, habitualmente guardada en bases de datos, para asistir en las fases de modelización y de valoración del AHP. Para ello se recurrirá a herramientas de análisis multivariante, como el análisis factorial y el análisis estructural.

El trabajo ha quedado estructurado como sigue: la sección 2 (§2) presenta el Proceso Analítico Jerárquico y sus fases de modelización y valoración; en la sección 3 (§3) se introducen las técnicas de análisis multivariante (análisis factorial y análisis estructural) que se proponen como herramientas que asistan en las fases anteriormente citadas; en la sección 4 (§4) se lleva a cabo la propuesta y se presentan algunos resultados obtenidos para un problema en particular, y por último (§5), se comentan los aspectos más destacados del trabajo.

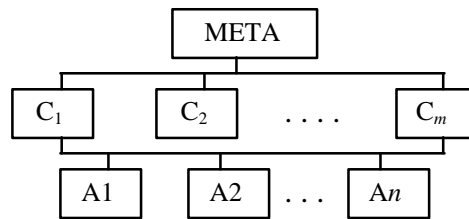
## **2. Modelización en AHP**

Cuando se quieren obtener las prioridades que un individuo asigna a un conjunto de elementos a partir de las valoraciones asociadas a los mismos según sus juicios y preferencias, es preciso establecer un conjunto de procedimientos y herramientas que permitan aprovechar el poder intrínseco de la mente para conectar las experiencias e intuiciones con los objetivos fijados (Moreno, 1996). En este sentido, el Proceso Analítico Jerárquico es una teoría general sobre juicios y valoraciones que permite combinar lo científico y racional con lo intangible para ayudar a sintetizar la naturaleza humana con lo concreto de nuestras experiencias capturadas a través de la ciencia.

Esta técnica de decisión multicriterio discreta (Saaty, 1980), consta de cuatro etapas o pasos: (1) modelización; (2) valoración, (3) priorización y (4) síntesis. En la primera etapa, se construía un modelo, habitualmente una jerarquía, que representara el problema de decisión. El objetivo, misión o meta global se colocaba en la parte superior de la jerarquía, los criterios en el siguiente nivel y las alternativas en el último. Esta estructura, la más sencilla posible, puede completarse añadiendo tantos niveles como exija una correcta modelización del problema. En la segunda etapa, el decisor incorpora sus juicios mediante comparaciones pareadas entre los elementos considerados en el problema. En la etapa tercera, se obtienen las prioridades locales de cada uno de estos elementos a partir de la información proporcionada por el decisor en la etapa anterior. A partir de estas prioridades locales y aplicando el principio de composición jerárquica se obtienen en la cuarta etapa las prioridades globales, esto es, la prioridad de cada alternativa respecto a la mete global o misión considerada en el problema.

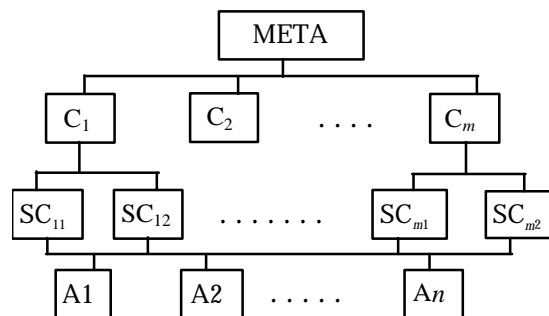
La fase de modelización supone que todos los elementos (alternativas, criterios, escenarios, actores) que se consideran relevantes para el Problema de Decisión han sido identificados así como las relaciones y dependencias entre los mismos. En este sentido, para que un problema pueda modelizarse mediante una jerarquía se supone que los elementos de un nivel son independientes de los elementos del nivel inferior y de sus hermanos (mismo nivel).

La jerarquía más sencilla consta de tres niveles. En el nivel superior se coloca el objetivo o meta final del problema. A continuación, en el segundo nivel, se colocan los criterios que se consideran relevantes para la evaluación de las distintas alternativas (último nivel de la jerarquía).



Jerarquía con tres niveles

Esta estructura es la más sencilla que se puede construir, pudiendo completarse para adecuarla a la realidad con la inclusión de otros niveles para escenarios, actores, subcriterios, etc.



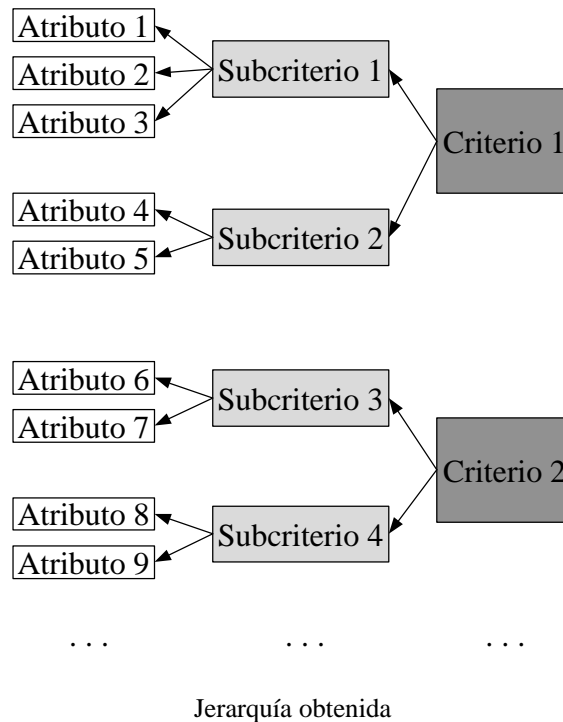
Jerarquía con niveles de criterios y subcriterios

El diseño de jerarquías requiere experiencia y conocimiento del área a la que pertenezca el problema. Dos decisores diferentes obtendrán normalmente dos estructuras diferentes para el mismo problema. Por tanto, no se puede hablar de una única jerarquía para cada problema. Por otra parte, aunque diseñen la misma jerarquía, sus preferencias pueden llevar a la selección de distintas alternativas. Un grupo de individuos puede trabajar conjuntamente para alcanzar un consenso tanto en la jerarquía como en la evaluación.

En la etapa de valoración, el decisor emite sus juicios comparando dos a dos los elementos de un mismo nivel de la jerarquía con respecto al nodo en común del nivel inmediatamente superior, de forma que cada juicio se centra en la comparación de dos elementos con respecto a una única característica. En una jerarquía con tres niveles, se compararán las alternativas entre sí con respecto a cada uno de los criterios, y los criterios entre sí con respecto a la meta del problema. Los juicios o comparaciones pareadas se recogen en las denominadas matrices recíprocas de comparaciones pareadas. Este enfoque de medidas relativas, requiere conforme a consideraciones psicológicas, que el número de elementos para los que se efectúan las comparaciones relativas no sea superior al ‘número mágico’  $7 \pm 2$  (Miller, 1956), y que estos sean del mismo orden de magnitud.

### 3. Modelización empírica

Se considera como información de partida las valoraciones que se tienen de las alternativas para cada uno de los distintos atributos considerados. El objetivo inicial es construir la jerarquía de criterios y subcriterios que agrupe al conjunto de atributos. El resultado final es una o varias propuestas de jerarquías que permitan asistir al decisor en la fase inicial de modelización del problema.



El modo en que se obtienen estas jerarquías es el siguiente: Se comienza realizando un análisis factorial considerando los atributos como variables de partida para su agrupación en factores. El resultado de este primer análisis es el último nivel de subcriterios que se corresponden con los factores obtenidos en el análisis.

El análisis factorial se emplea, en este caso, como técnica exploratoria que permite detectar los subcriterios que se considerarán como punto de partida de la estructura de la jerarquía. Para determinar la validez de esta estructura de subcriterios se realiza un análisis factorial confirmatorio utilizando técnicas de ecuaciones estructurales que se presentan a continuación. (ref)

El Análisis Estructural es una extensión de las técnicas de regresión múltiple y del análisis factorial que analiza simultáneamente múltiples relaciones causales reflejadas en la parte correspondiente al modelo estructural o causal. Por otra parte, permite representar conceptos no observados o latentes, recogidos en el modelo de medida.

Dada la naturaleza intangible de la mayoría de las variables del problema es natural plantear las relaciones entre los aspecto relevantes del mismo en términos de variables latentes. El análisis estructural permite establecer este tipo de relaciones a la vez que especifica el modo en el que estas variables latentes están relacionadas con las variables manifiestas u observadas del problema. La formulación típica del análisis estructural de un problema, utilizando notación LISREL, es:

Modelo estructural:

$$\eta = B\eta + \Gamma\xi + \zeta$$

Modelo de medida:

$$\text{Endógeno: } Y = \Lambda_Y\eta + \varepsilon$$

$$\text{Exógeno: } X = \Lambda_X\xi + \delta$$

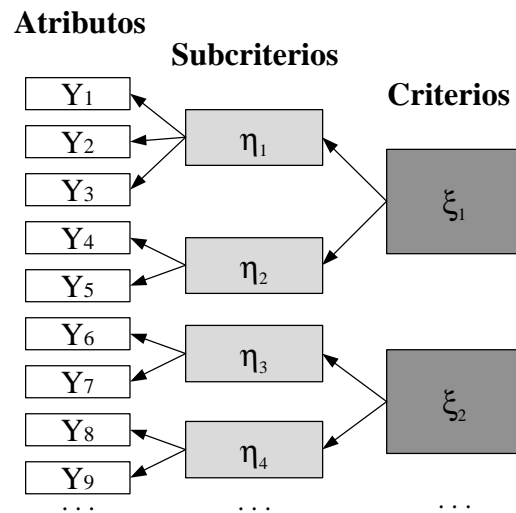
donde  $\xi$  denota a los constructores exógenos,  $\eta$  a los constructores endógenos,  $X$  a los indicadores de los constructores exógenos,  $Y$  a los indicadores de los constructores endógenos y  $\zeta$ ,  $\delta$  y  $\varepsilon$  son los distintos términos del error.

Así, para realizar el análisis factorial confirmatorio que se mencionaba anteriormente, se especifica únicamente un modelo de medida (el endógeno), donde las variables endógenas son los atributos y los constructores son los subcriterios (factores) que se quieren contrastar. El análisis efectuado proporciona medidas indicadoras de la bondad del modelo especificado, así como los coeficientes del modelo que son susceptibles de ser modificados para alcanzar un mejor grado de bondad en el ajuste del modelo (modification index).

Tras revisar y reespecificar el modelo se obtiene la primera agrupación de atributos en subcriterios. A continuación se deben ir agrupando de nuevo estos subcriterios para formar el nivel superior de criterios que los englobe y de este modo ir completando la jerarquía. Para este proceso se recurre a un procedimiento de agrupación paso a paso, en el que en cada paso se van agrupando subcriterios cuyas correlaciones resulten ser significativas. Las correlaciones entre los subcriterios que se utilizan en cada paso son las estimaciones que proporciona el propio análisis factorial confirmatorio realizado con la estructura del paso anterior.

Una vez agrupados los subcriterios, se recurre de nuevo al análisis estructural, realizando en este caso un análisis factorial de segundo orden, en el que se estudia la

validez del modelo completo. En este análisis factorial de segundo orden aparecen factores de primer nivel, que son los subcriterios que agrupan a los atributos, y factores de segundo nivel, que son los criterios que agrupan a los subcriterios o factores de primer nivel, con lo que ya aparece un modelo, que se debe validar, en el se recoge la estructura completa de la jerarquía.



Modelo factorial de segundo orden

En este caso la estructura de ecuaciones correspondientes al caso a analizar son:

Modelo estructural:  $\eta = \Gamma\xi + \zeta$

Modelo de medida:  $Y = \Lambda_Y\eta + \varepsilon$

Que se resumen en el modelo del análisis factorial de segundo orden:

$$Y = \Lambda_Y(\Gamma\xi + \zeta) + \varepsilon$$

Una de las ventajas del uso del análisis estructural es su carácter confirmatorio, en el sentido que da información sobre la validez del modelo completo, en este caso de la jerarquía que estamos construyendo, y también de cada una de las partes de esa jerarquía, proporcionando además pautas (modification index) para ir modificando el modelo de modo que finalmente obtengamos uno que resulte válido. La jerarquía final obtenida depende en parte de la dirección que se tome a la hora de realizar las modificaciones que se hacen al modelo o modelos iniciales obtenidos en el análisis factorial, de modo que al finalizar el proceso el resultado son una o varias jerarquías que se ofrecen al decisor para asistirle a la hora de decidir como modelizar el problema, y teniendo en cuenta que las jerarquías propuestas cumplen los requisitos de ser compatibles con los datos subyacentes.

## **4. Integración de modelización empírica y teórica (propuesta)**

En el apartado anterior se ha visto cómo se pueden generar jerarquías utilizando técnicas de análisis multivariante, partiendo única y exclusivamente de la información que los datos proporcionan. El problema a considerar en este apartado es cómo conjuntar esa información (jerarquía empírica), con la que el experto aporta, es decir, con la jerarquía que él propone (jerarquía teórica).

Hay diversas formas de resolver esta integración. En lo que sigue, presentamos una propuesta consistente en especificar el modelo de ecuaciones estructurales correspondientes a la jerarquía del experto e ir reespecificando parámetros de manera que se obtuviese un grado aceptable en la bondad del modelo final. Estas reespecificaciones de los parámetros pueden acarrear la aparición de nuevos criterios no considerados en la modelización inicial o variaciones de las estructuras de los ya existentes.

Tanto la justificación teórica de esta propuesta como la concreción de otras propuestas alternativas son objeto de las líneas investigadoras actualmente en curso.

La metodología propuesta se ha aplicado al estudio efectuado en la selección de las actuaciones incluidas en el Plan Nacional de Regadíos (Moreno, 1996), en concreto las relativas a los regadíos potenciales. Para este problema en concreto se han considerado 59 alternativas de regadíos potenciales y para cada una se han medido 30 atributos. Las valoraciones de todos ellos siguen una escala de razón entre 1 y 7.

La estructura de la jerarquía empírica obtenida finalmente agrupa a los 30 atributos en 9 subcriterios (factores de primer nivel), y éstos, a su vez, quedan agrupados en 3 criterios (factores de segundo nivel).

Por otra parte, la jerarquía teórica o subjetiva aportada por el experto consiste en 4 criterios que agrupan a 17 subcriterios. Esta jerarquía se somete a estudio utilizando el análisis estructural tras su modelización previa en ecuaciones estructurales. Como resultado de este análisis se obtienen los cambios que se pueden realizar en el modelo de forma que se aproxime al modelo empírico.



## **5. Conclusiones**

Todo lo tratado hasta el momento hace referencia a la fase de modelización. Estos aspectos se están estudiando de forma que, mediante técnicas bayesianas, se pueda proporcionar una jerarquía a posteriori considerando como información a priori la jerarquía dada por el experto.

Por otra parte, el trabajo tiene otra línea de interés, todavía abierta, centrada en la fase de valoración, y cuyo objetivo es proporcionar los pesos correspondientes a cada uno de los elementos de la jerarquía a partir de las cargas o valoraciones objetivas obtenidas del análisis multivariante de los datos.

## REFERENCIAS

BARTHOLOMEW, D.J. (1994): Bayes' Theorem in Latent Variable Modelling, en Freeman, P.R.; Smith, A.F.M. (eds.): *Aspects of Uncertainty*. Willey.

HAIR, J.F.; ANDERSON, R.E.; TATHAM, R.L.; BLACK, W.C. (1995): *Multivariate Data Analysis*. Prentice-Hall.

JÖRESKOG, K.G.; SÖRBOM, D. (1979): *Advances in Factor Analysis and Structural Equation Models*. Abt Books. Cambridge, Massachusetts

MORENO, J.M. (1996): Metodología Multicriterio en el Plan Nacional de Regadíos (privado).

SAATY, T.L. (1977): A scaling method for priorities in hierarchical structures. *J. of Mathematical Psychology* 15 (3), 234-281.

SAATY, T.L. (1980): *The Analytic Hierarchy Process*. Mc Graw-Hill, New York.